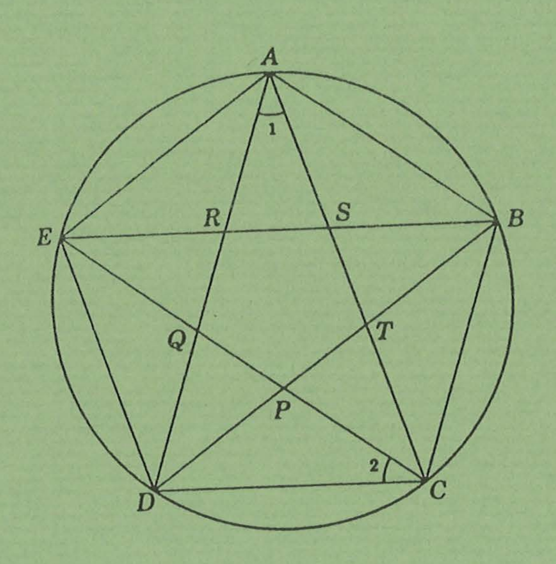
GEOMETRÍA Y ARQUITECTURA (III)

PROPORCIÓN

por

ASCENSIÓN MORATALLA

Mª AGRIPINA SANZ



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

GEOMETRÍA Y ARQUITECTURA (III)
PROPORCIÓN

por

ASCENSIÓN MORATALLA

Mª AGRIPINA SANZ

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Geometría y Arquitectura (III)
Proporción

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
CUADERNO 82.01
ISBN: 84-95365-46-4
Depósito Legal: M-30562-2000

Este cuaderno, "Geometría y Proporción" es el tercero de la Serie "Geometría y Arquitectura". Con los otros dos, "Geometría en la Arquitectura" y "Simetría" quiere ser un punto de encuentro de la geometría, la arquitectura y el arte que estimule a nuestros alumnos al estudio de las matemáticas.

1 Geometría y Proporción

El concepto de proporción deriva históricamente del proceso de comparación. Si nos fijamos en los métodos de medición de longitudes de las antiguas civilizaciones: el dedo, la palma, el codo, el brazo, el pie, el paso, etc, representaban unidades básicas, de referencia humana, con las que se establecieron sistemas de medición consistentes. La comparación relativa de dichas unidades de medida dio lugar a diferentes sistemas metrológicos de proporciones. Así, en Babilonia

$$1palma = \frac{1}{6}codo$$

y en Grecia

$$1palma = 4dedos$$

El carácter antropomórfico de estos sistemas de medición hizo que la teoría de proporciones tuviera un papel relevante no sólo en la construcción de edificios notables sino también en la pintura y la escultura.

La teoría de la proporción asumió una particular importancia en el Renacimiento. Según Vitruvio: "la proporción es la conmensurabilidad de cada uno de los miembros de la obra y de todos los miembros en el conjunto de la obra mediante una determinada unidad de medida o módulo". Su sistema de medición que se ha denominado armónico, considera como unidad de medida la altura (o el rostro) de un hombre (bien formado).

Alberti con su tratado *Sobre la pintura* de 1435 y Durero con su obra *Los cuatro libros de las proporciones humanas* contribuyeron enormemente a esta teoría de proporciones que culminaría con los estudios de Leonardo da Vinci sobre la figura humana.

A partir del siglo XVII comenzó una lenta transformación del concepto de proporción y de su aplicación a la arquitectura. Tras un periodo de decadencia, que duraría hasta el siglo XIX, la teoría matemática acerca de las proporciones dinámicas toma un impulso decisivo gracias a las nuevas tendencias artísticas: Escuela Cubista, Sprit Nouveau y el movimiento Dstijl y el Bauhaus.

En la segunda mitad del siglo XX la teoría de la proporción deja paso a la coordinación modular.

1.1 El problema armónico.

Al concepto aritmético de relación entre dos magnitudes se le denomina razón o proporción. En el caso de dos longitudes al compararlas con respecto a una unidad, la razón $\frac{a}{b}$ es la medida de la magnitud a si se toma como unidad la magnitud b. En la obra de Euclides, cuya teoría de razones y proporciones está basada en Eudoxio, discípulo de Platón, encontramos la siguiente definición:

"*Razón* es la relación cualitativa en lo que se refiere a la dimensión entre dos magnitudes homogéneas. La *proporción* es la igualdad de razones".

Esto conduce a la ecuación general de la *proporción geométrica* de cuatro magnitudes (proporción discontinua)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

que en el caso en el que $b = c$ se obtiene la *proporción geométrica continua*

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$$

Podemos obtener una proporción continua partiendo únicamente de dos magnitudes a y b:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Esta ecuación dice : *"La razón entre la suma de dos magnitudes consideradas y una de ellas (la mayor), es igual a la razón entre ésta y la otra (la menor)"*.

Aplicada a las longitudes que dividen un segmento AC en dos partes AB y BC por un punto B, de tal modo que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

corresponde a lo que Euclides llama "división de una longitud en media y extrema razón".

Esta razón fue llamada *divina proporción* por Fray Lucca Paccioli di Borgo y veremos más adelante su influencia en los cánones arquitectónicos.

Los griegos, y entre otros Nicómano de Gerasa (siglo I) escribían una proporción bajo la forma de una progresión. Por ejemplo, en una progresión geométrica del tipo

$$1, k, k^2, k^3, ..., k^n, ...$$

los elementos definen una proporción geométrica continua, es decir,

$$\frac{1}{k} = \frac{k}{k^2}$$

Además, dados tres elementos de una progresión geométrica a, b, c, el término b se denomina *media geométrica* y puesto que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

se obtiene que

$$b = \sqrt{ac}$$

En el caso de que tres elementos a, b, c, estén en proporción aritmética, b se define como la *media aritmética* y su valor es

$$b = \frac{a + c}{2}$$

ya que los términos de esta proporción cumplen que $b - a = c - b$.

En las proporciones armónicas

$$\frac{(b - a)}{a} = \frac{(c - b)}{c}$$

la *media armónica* es

$$b = \frac{2ac}{a + c}$$

Tanto los tres tipos de proporción (la proporción aritmética, la proporción geométrica y la proporción armónica) como las medias proporcionales se atribuyen a Pitágoras.

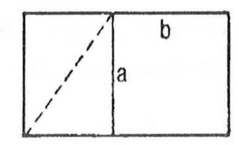
1.2 La proporción del rectángulo.

Dada su importancia geométrica dentro de la arquitectura pasemos a estudiar la proporción del rectángulo.

Sea un rectángulo, de lados a y b, se define la *proporción del rectángulo* como el cociente:

$$p(a,b) = \frac{Máximo(a,b)}{Mínimo(a,b)}$$

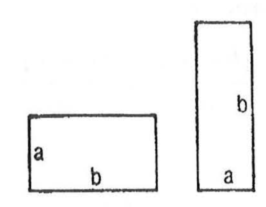
es decir es el cociente entre el lado mayor y el lado menor del rectángulo. Su valor, por tanto, es siempre mayor o igual que 1. Sólo en el caso del cuadrado la proporción es 1.



Además esta proporción así definida no depende del orden de los lados puesto que

$$Max(a,b) = Max(b,a)$$

$$Min(a,b) = Min(b,a)$$

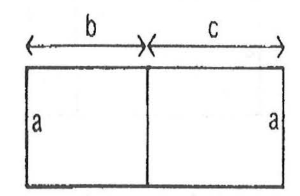


Algunas propiedades de este tipo de proporción que pueden resultar de interés son las siguientes:

Propiedad-1. La proporción es aditiva en ciertas condiciones.

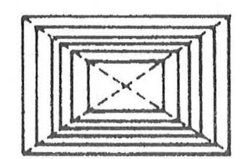
Si $a \leq Min(b,c)$ entonces

$$p(a,b) + p(a,c) = p(a, b+c)$$



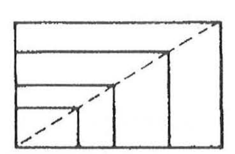
Propiedad-2. La proporción es una función continua.
Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} p(a_n, b_n) = p(a,b)$$



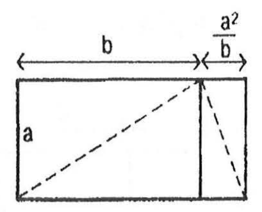
Propiedad-3. La proporción es invariante por homotecias y semejanzas.
Si $\lambda > 0$ entonces

$$p(a,b) = p(\lambda a, \lambda b)$$



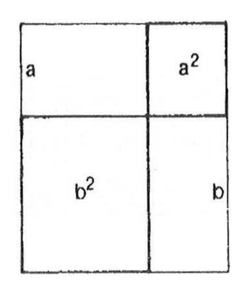
Propiedad-4. Dado un rectángulo de lados a, b, sus rectángulos recíprocos son dos rectángulos construidos sobre cada uno de sus lados que tienen a su vez como lados $a, \frac{a^2}{b}$ y $b, \frac{b^2}{a}$. Entonces

$$p(a, \tfrac{a^2}{b}) = p(b, \tfrac{b^2}{a}) = p(a,b)$$



Propiedad-5. La proporción entre las áreas de los cuadrados sobre los lados de un rectángulo es el cuadrado de la proporción de dicho rectángulo. Es decir si el rectángulo tiene de lados a, b entonces

$$p(a^2, b^2) = p^2(a, b)$$



1.2.1 Proporciones conmensurables o estáticas.

Se dice que $p(a, b)$ es *conmensurable* si es un número racional positivo, es decir

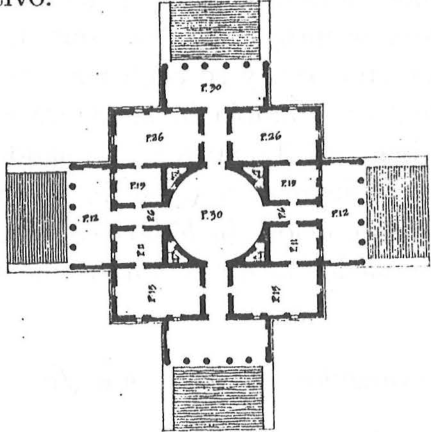
$$p(a, b) = \frac{m}{n}$$

siendo m y n enteros positivos.

Este tipo de proporción de origen pitagórico tuvo un papel relevante en los arquitectos del Renacimiento. Un claro ejemplo de cómo las proporciones entre las distintas partes de una obra arquitectónica se pueden expresar por relaciones de números enteros, lo podemos observar en Santa María Novella de Florencia, de Palladio, quien dio gran importancia a estas relaciones estáticas. Su novedad fundamental consistió en conectar sistemáticamente una estancia con otra por medio de proporciones armónicas.

Los métodos de Palladio invertían el modo clásico de proceder. En lugar de subdividir en partes menores las dimensiones globales del edificio según

relaciones expresadas por números enteros, determina una serie de proporciones para las estancias: 1:1, 1:2, 2:3, 3:4... y las yuxtapone luego con un procedimiento aditivo.

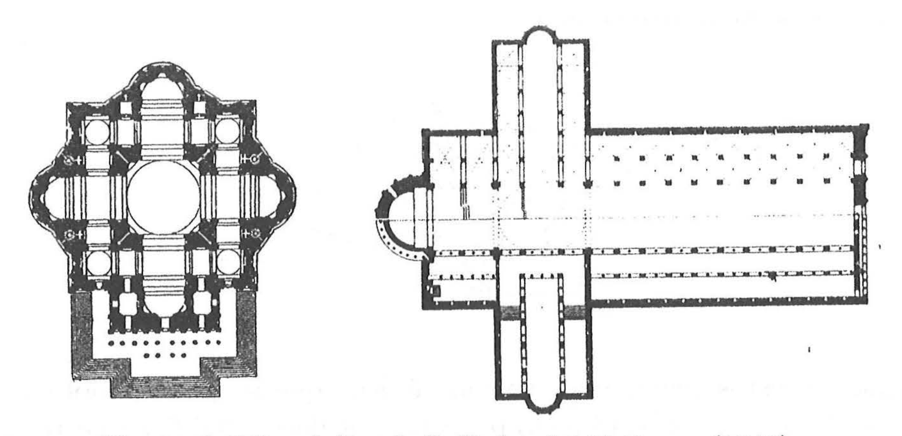


Villa Capra. Vicenza, 1552. Andrea Palladio

1.2.2 Proporciones inconmensurables o dinámicas.

Se dice que $p(a,b)$ es *inconmensurable* si es un número irracional positivo.

El número $\sqrt{2}$ fue el primer número irracional que suscitó el interés de los antiguos. Este número, que representa la diagonal de un cuadrado de lado unitario, también aparece incidentalmente en Vitruvio. Es posible hallar $\sqrt{2}$ en algunas plantas de antiguas Basílicas como la de San Pedro y Sta. Práxedes en Roma. La proporción $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ aparecen en el trazado de la catedral de Pisa.

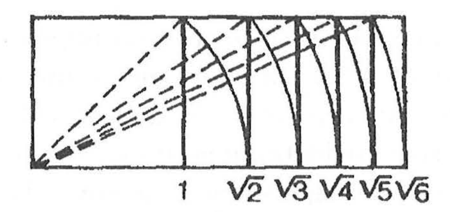


Planta de Miguel Angel. S. Pedro del Vaticano (1546)
Catedral de Pisa (s.XI-XII).

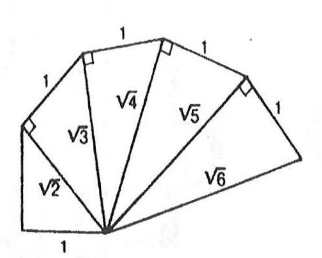
Los números $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$, son tales que los cuadrados construidos sobre sí mismos conducen a sucesiones ligadas por proporciones conmensurables. La importancia de estas proporciones irracionales (irracionales linealmente pero racionales en su cuadrado), se intuye en el uso que de ellas hace Vitruvio en delicados problemas de simetría, y se confirma con la frase de Paccioli 'che la proporzione si molto più ampia in la quantità continua che in la discreta' (Divina Proportione, lib II, cap XX), llamando discreta o estática a $1/2, 2/3, 3/4$ y continua o dinámica a $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$. Geométricamente esto indica que el rectángulo de proporción $p(a, b)$ no es repetición de un cuadrado, o bien que sus lados no se pueden medir simultáneamente por repetición de una misma unidad.

Si consideramos los rectángulos de proporción $\sqrt{n}$

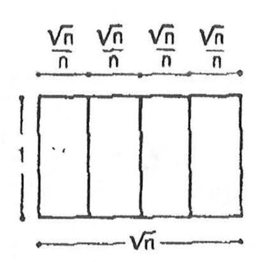
$$p(a, b) = \sqrt{n}.$$



observamos que una de las características de estos rectángulos es que forman una serie autogenerable.

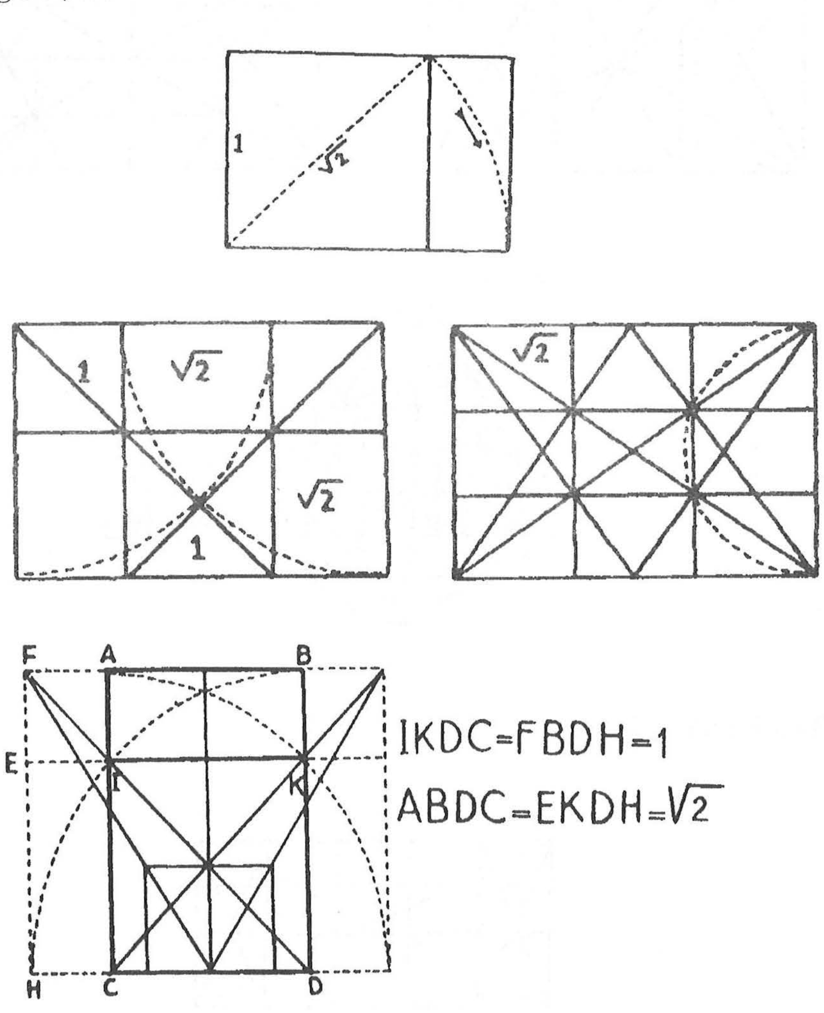


Además estos rectángulos son los únicos que se pueden obtener como reunión de n veces el rectángulo recíproco, es decir, dividiendo estos rectángulos en n partes por el lado mayor, se obtienen n rectángulos de idéntica proporción al dado.

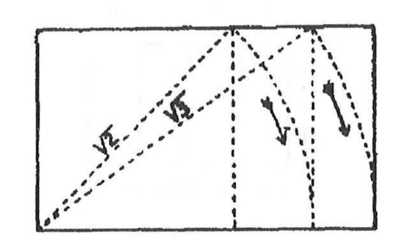


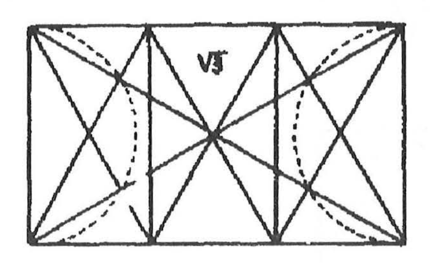
En los siguientes dibujos se puede apreciar la descomposición armónica de los rectángulos de proporción $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$.

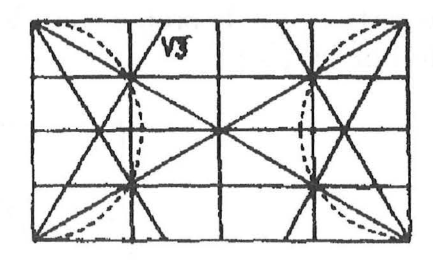
Rectángulo $\sqrt{2}$:

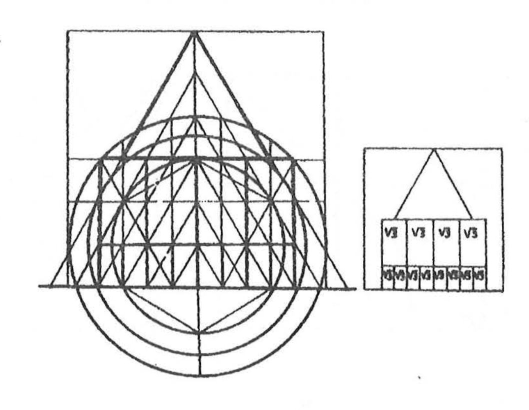


Rectángulo $\sqrt{3}$:

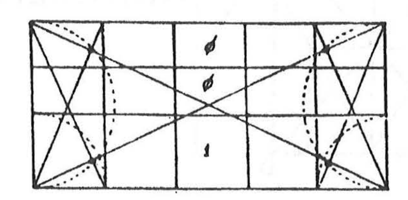


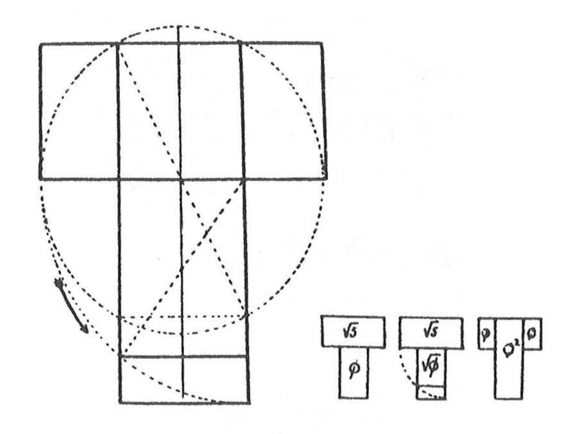


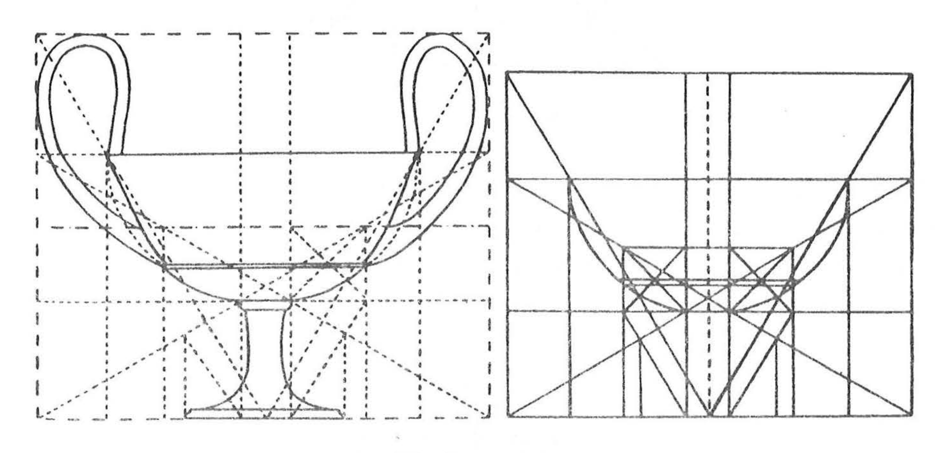




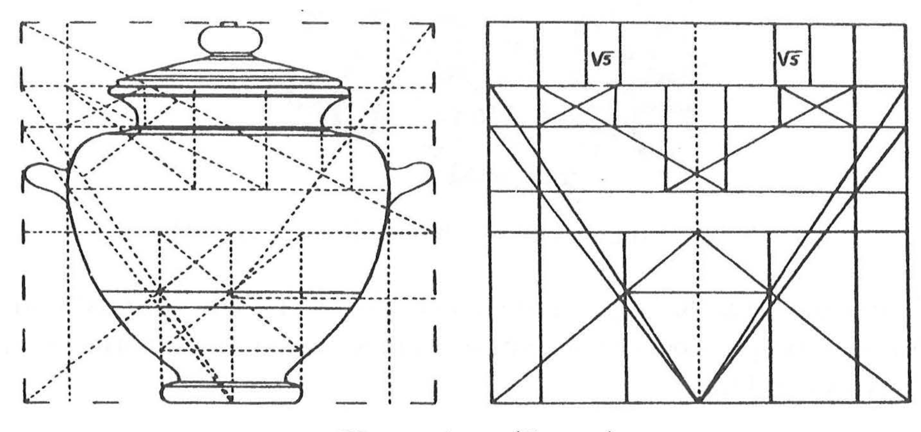
Rectángulo $\sqrt{5}$:



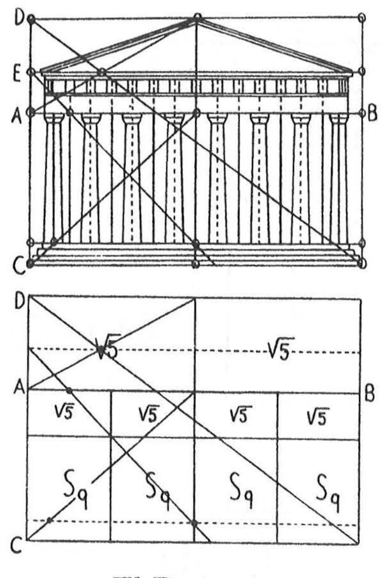




Vasija griega.

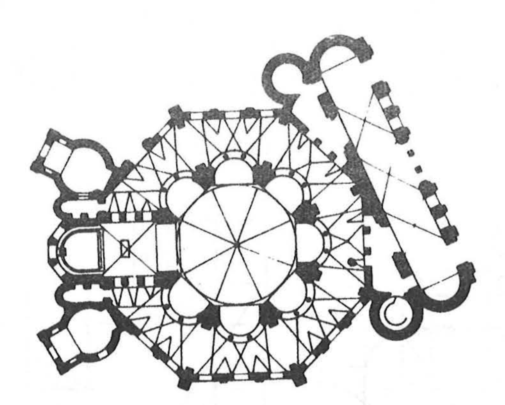


Vaso griego (Samos)



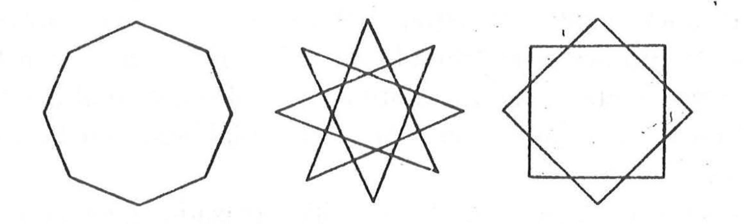
El Partenón

El octógono regular también ha sido muy utilizado en arquitectura en plantas de iglesias, catedrales, torres... especialmente en el arte bizantino, árabe y románico ya que su simetría está relacionada con el cuadrado y con su diagonal $\sqrt{2}$.



Planta octogonal de S. Vital de Rávena (s. VI).

El octógono estrellado y el pseudo-octógono estrellado (formado por dos cuadrados superpuestos) se encuentran en muchos mosaicos y ornamentaciones de Arabia e India.



2 La sección Aúrea.

Esta proporción ha mantenido un interés creciente y una constante actualidad con el paso de los siglos. El nombre de Sección aúrea de debe a Leonardo da Vinci y se simboliza con la letra griega ϕ, inicial de Fidias, escultor griego que la utilizó. Una primera definición se halla en Euclides: "Un segmento se divide en media y extrema razón cuando todo el segmento es a su parte mayor como esta es a la menor".

El monje Luca Paccioli di Borgo, nacido a mediados del s. XV en Toscana, estudiando en Platón y Vitruvio el papel transcendental de la Sección aúrea en cuanto a regir las proporciones de los cinco cuerpos platónicos, compone el tratado sobre la *Divina Proporción* que será ilustrado con las magníficas láminas de Leonardo da Vinci.

En el Vitruvio editado en Bolonia en 1532, se encuentra un comentario muy iluminador de Caporali de Perusa: "La *analogía* de Vitruvio en que se apoya la *symetría* no es la proporción geométrica continua en general, sino 'la divina proporción de Fra Luca y de Durero', es decir, la Sección aúrea".

Palladio y Miguel Angel fueron probablemente los últimos arquitectos que aplicaron conscientemente a sus composiciones las proporciones nacidas de la Sección aúrea y los conceptos vitruvianos de simetría. A fines del s. XVII, el sentido exacto de la palabra simetría es olvidado y reemplazado por la acepción aún corriente hoy día: la repartición de elementos idénticos a una y otra parte de un eje o de un plano de simetría. Estos elementos son a menudo iguales entre sí, lo que da un equilibrio estático aritmético, sin ninguna relación con la simetría dinámica de los antiguos. En general, la arquitectura se ha mecanizado.

Aunque las obras de Paccioli sirvieron de base a los trabajos matemáticos del siglo XVI, los matemáticos también olvidaron la armonía de estas proporciones, Kepler es el último que menciona la Sección aúrea, citándola como una de las dos joyas de la Geometría. A mediados del siglo XIX fue

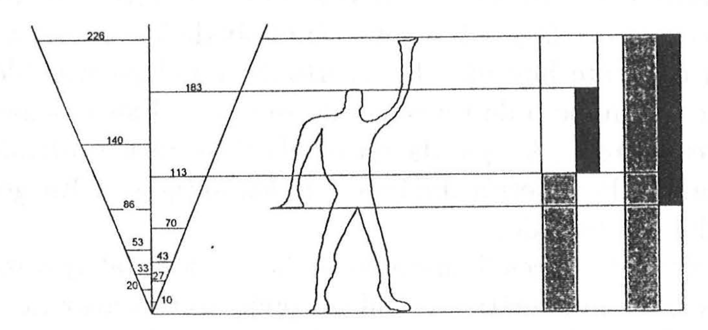
descubierta nuevamente por Zeysing (hacia 1850) y como proporción plana ideal (bajo la forma del rectángulo de módulo ϕ), fue actualizada por Fechner unos veinte años después. Este rectángulo sugiere al que lo contempla la unidad en la variedad, y ha entrado triunfalmente en la arquitectura a través de Le Corbusier.

A comienzos del siglo XIX los sencillos trazados geométricos son sustituidos por trazados más rigurosos basados en la sección aúrea. En lugar de la simetría bilateral y rotatoria, consideradas demasiado estáticas, los artistas prefieren la euritmia (eu=bien, ritmia=ritmo) generada a través de la composición equilibrada, pero no simétrica, de elementos.

Las teorías proporcionales reservan una particular atención, en el campo de la arquitectura, a las técnicas de los trazados reguladores desarrollados en la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX. Surge el deseo de controlar la composición con leyes matemáticas. Todos los artistas de los movimientos de vanguardia se interesaban por el instrumento geométrico y matemático, para investigar la estructura interna de la obra.

A mediados del siglo XX la aparición del Modulor (París, 1948)(*module*= unidad de medida y *section d'or*) de Le Corbusier, marca un punto culminante de la teoría de la proporción. La propuesta de diseño que hace Le Corbusier es el establecimiento de un módulo arquitectónico que contemple a la vez el dimensionado humano y la necesidad internacional de producción en serie. Propone para la arquitectura un sistema modular susceptible de crear armonía arquitectónica. A partir de rectángulos aúreos por superposición y división, construye la malla fundamental: fijada la unidad d, altura del hombre, considera dos series, la serie roja y la serie azul:

Serie roja: $d, \phi d, \phi^2 d, \phi^3 d, ...$
Serie azul: $2d, 2\phi d, 2\phi^2 d, 2\phi^3 d, ...$



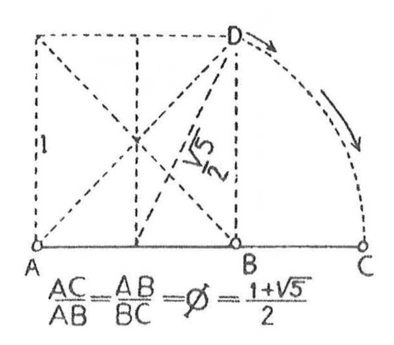
Este sistema proporcional es fuente de rectángulos aúreos y de cuadrados

dobles. Uno de sus méritos es enlazar las series proporcionales y el mundo de la industrialización de la construcción.

A partir de la Convención sobre "La Divina Proporción", Milán, 1951, disminuye gradualmente el interés por la teoría de la proporción para dejar paso a los problemas de coordinación modular, para evitar que sean sencillamente la repetición de un producto.

2.1 Una construcción geométrica de la Sección Aúrea.

Consideremos un cuadrado de lado la unidad y realicemos la siguiente construcción geométrica: abatir sobre el lado AB, el segmento que une el punto medio de AB con D obteniendo el punto C.

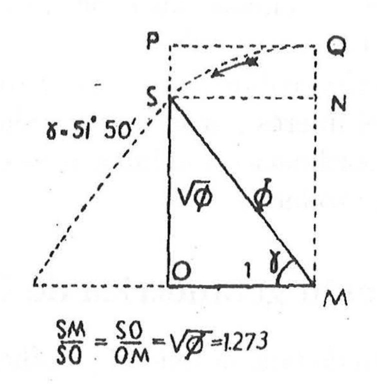


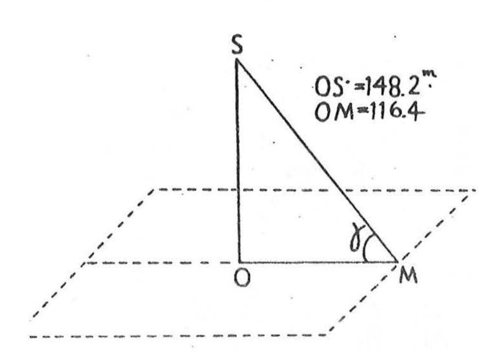
Como el segmento AB es el lado del cuadrado, la longitud del segmento AC es ϕ.

2.2 La sección aúrea en los polígonos.

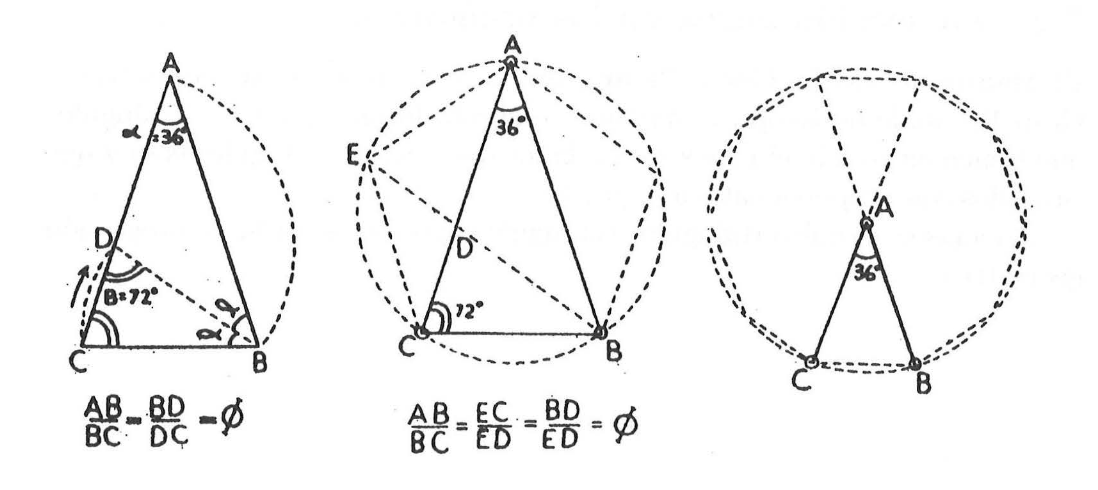
El triángulo de la Gran Pirámide. Si consideramos la sección de la Gran Pirámide de Keops, observamos que está formada por dos triángulos que tienen en común el mayor de los lados que forman el ángulo recto y que sus lados son proporcionales a $1, \sqrt{\phi}, \phi$.

Además es el único triángulo rectángulo cuyos lados están en progresión geométrica.





Triángulo Sublime. El triángulo sublime es un triángulo isósceles de ángulo desigual 36°.

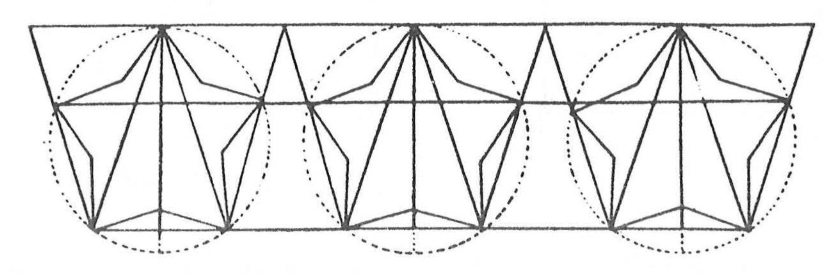


Este triángulo que no es solamente un elemento del pentágono, sino también del decágono, verifica que

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \phi \\ ang(ACB) &= ang(ABC) = 72^\circ. \end{aligned}$$

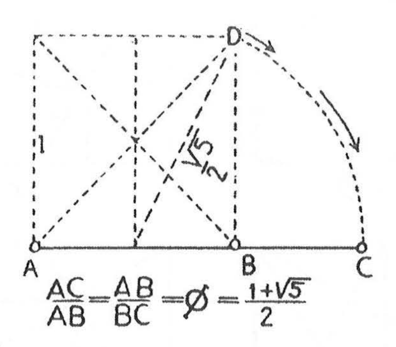
Estas dos relaciones le confieren el carácter de "sublime" y sus "armónicas" propiedades.

Los siguientes diseños se basan en este triángulo.

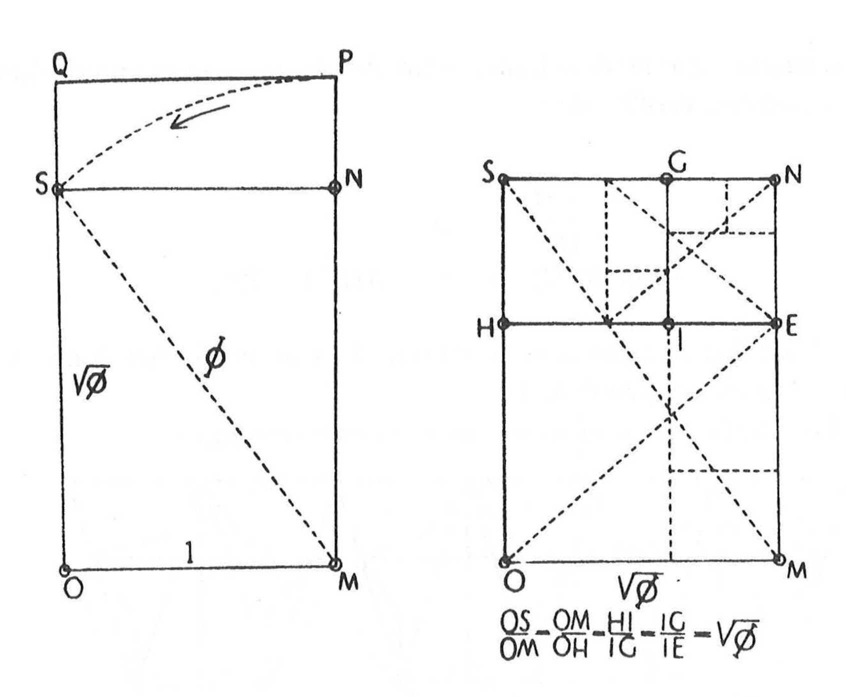


El rectángulo aúreo.

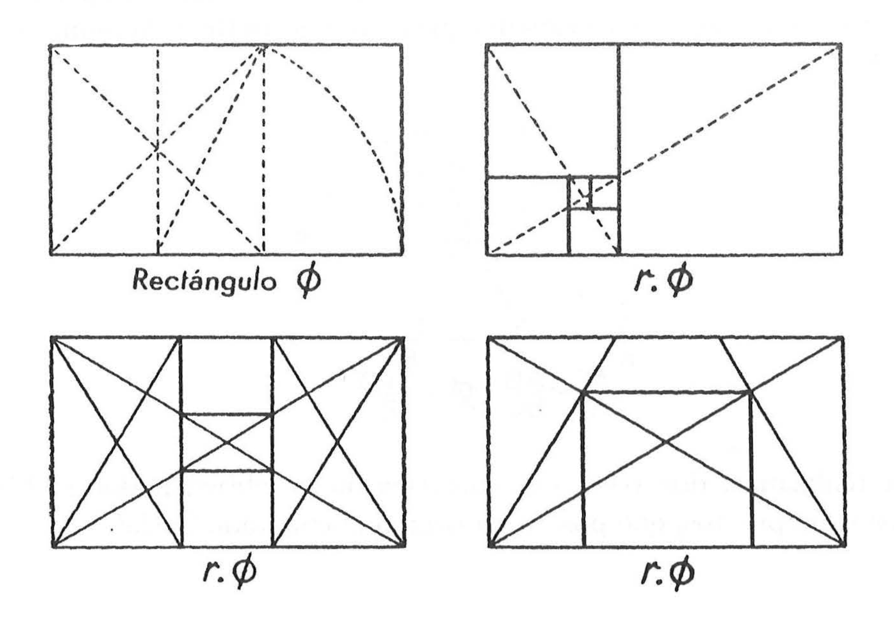
El rectángulo de proporción aúrea se obtiene trazando la perpendicular en el punto C y cerrando el rectángulo que resulta a partir de la figura obtenida en **2.1**



Si realizamos dos veces esa construcción se obtienen dos rectángulos aúreos superpuestos, que poseen en común el cuadrado inicial.

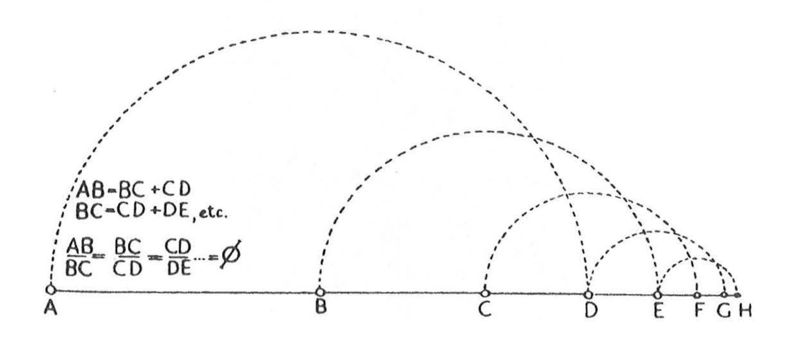


Entre las propiedades de este rectángulo resalta que si le añadimos un cuadrado o se lo sustraemos, queda un rectángulo semejante.



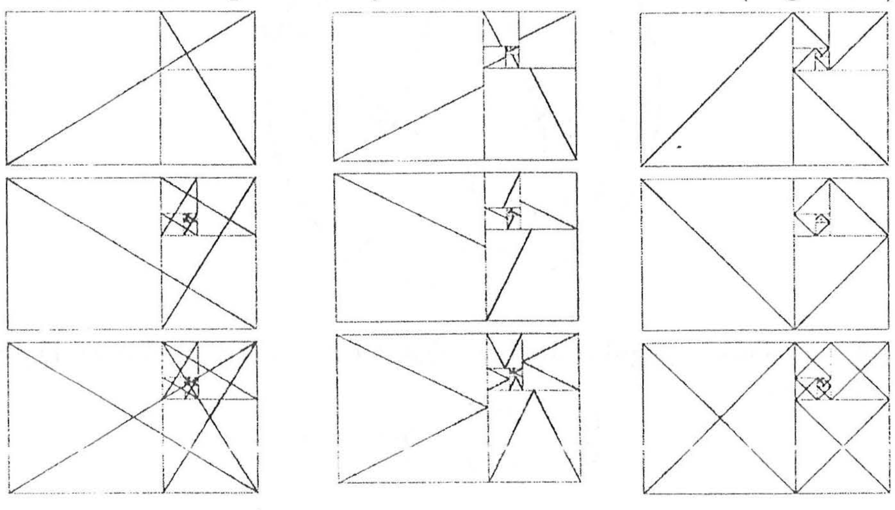
Rectángulos armónicos: ϕ y $\sqrt{5}$

La satisfacción estética de estos rectángulos la expresa Timerding "... the reassuring impression given by what remains similar to itself in the diversity of evolution". Una serie de segmentos con medidas proporcionales a sus términos se puede construir por adición o sustracción de segmentos por simples movimientos del compás.

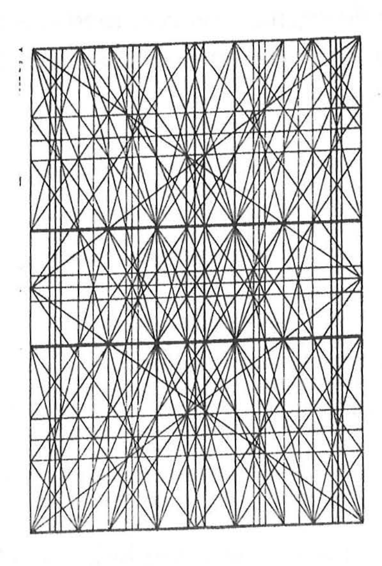


La descomposición armónica está fundada en el simple trazado de las diagonales y las perpendiculares bajadas sobre éstas desde los vértices de los diferentes rectángulos, obtenidos de forma recurrente a partir de un rectángulo aúreo inicial. Esta subdivisión determina un cuadrado además de un rectángulo de proporción ϕ dispuesto perpendicularmente al primero.

Esta subdivisión decreciente se puede repetir indefinidamente tomando diagonales sobre el cuadrado máximo incluido en el rectángulo aúreo o bien tomando las diagonales de rectángulos en él. Los siguientes diseños corresponden a este tipo de descomposición y están realizados por los estudiantes de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la UNNE (Argentina).

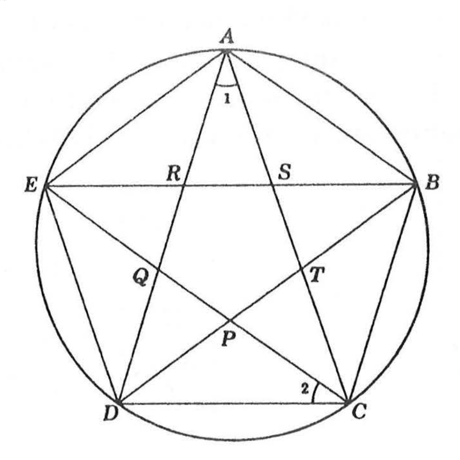


Otro diseño basado en esta descomposición armónica se muestra en la siguiente figura



El Pentagrama.

Si inscribimos un pentágono regular en una circunferencia y dibujamos sus diagonales obtenemos el *pentagrama místico*. Sugiere un ritmo indefinidamente recurrente y continuo basado en la proporción por excelencia.



En él, todos los triángulos son isósceles. Como los triángulos ACD y CDQ son semejantes,

$$\frac{AD}{QC} = \frac{QC}{QD} \text{ y } QC = AQ$$

resulta:

$$\frac{AD}{AQ}=\frac{AQ}{QD}$$

luego la diagonal AD queda dividida en "extrema y media razón" (llamada así antes del s. XVII), o sea, en Sección Aúrea.

AQ es la sección aúrea de AD

En la proporción anterior si llamamos ϕ a $\frac{AD}{AQ}$ y tomamos un pentágono de lado unidad ($AQ = 1$), resulta $AD = \phi$ y $QD = \phi - 1$. Luego:

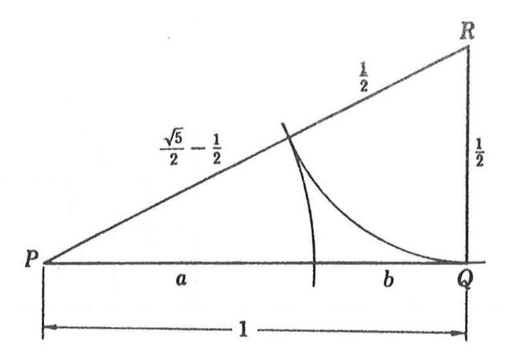
$$\phi = \frac{1}{\phi - 1}$$

por lo tanto $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Tomando la raíz positiva de la ecuación queda:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Como el triángulo ADC es isósceles y $A + 2A + 2A = 180°$, el ángulo A mide 36°.

Construcción con regla y compás de un ángulo de 36^0.
Dibujamos un triángulo rectángulo de base 1 y altura 1/2.



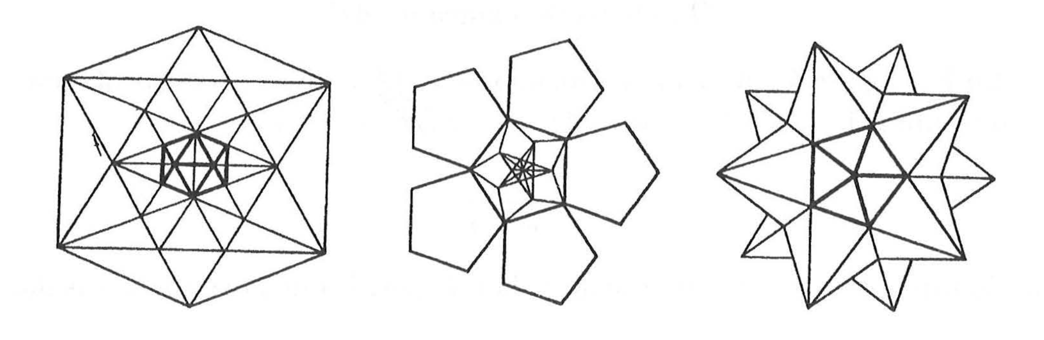
Tenemos:

$$\frac{1}{a}=\frac{a}{b}$$

con lo que el segmento PQ ha sido dividido en media y extrema razón. Basta construir un triángulo isósceles de lados iguales a la unidad y de base

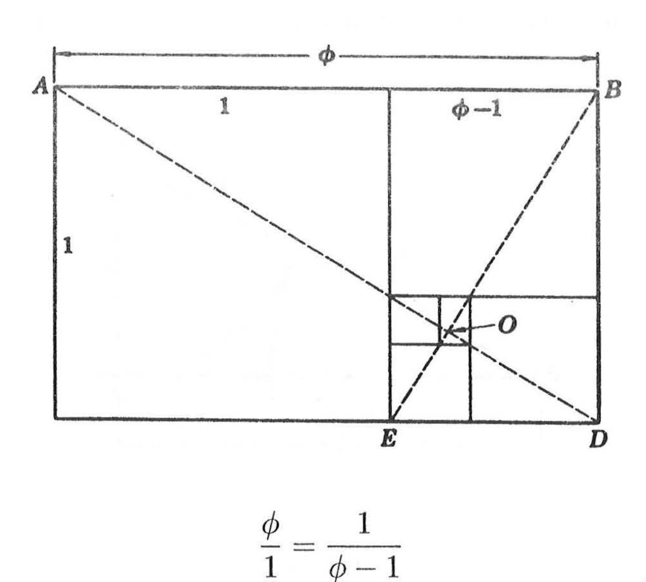
a para obtener un ángulo de 36°. Podemos establecer que: *Cualquier ángulo de 36° inscrito en una circunferencia abarca un arco, cuya cuerda es el lado del pentágono.*

Podemos observar unos esquemas de crecimiento regulados por la sección aúrea.



2.3 Semejanzas y espirales.

Si dibujamos un rectángulo de base ϕ y altura 1, y cortamos un cuadrado unidad, tenemos:



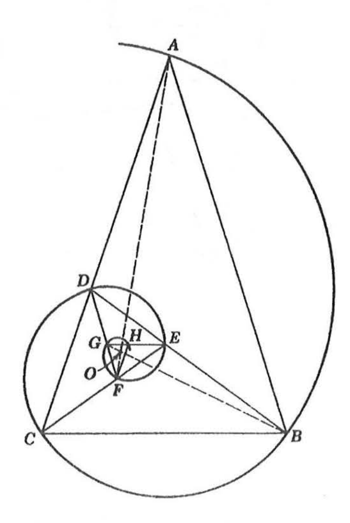
$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1}$$

es decir, el rectángulo que queda tiene también sus lados en razón $\phi : 1$.

El proceso puede repetirse indefinidamente. Se observa que el rectángulo cuarto tiene la misma orientación que el inicial. Estas construciones continuas

exigen que las diagonales AD y BE sean también diagonales de todos los rectángulos y por tanto, que su intersección O, sea el punto límite alrededor del cual se anidan.

Por un procedimiento análogo en los triángulos se verifica:



Aquí la semejanza ocurre después de una rotación de 108° en lugar de 90°. El triángulo FGH es el *quinto* en esa sucesión (sin contar al propio ABC) y hasta que no llegamos al décimo triángulo no volvemos a encontrar la misma orientación que el ABC. La intersección de cualesquiera dos de las diez rectas posibles que unen un vértice con el del siguiente triángulo opuesto, AF y BG, intersecan en el punto límite O, que es común a todos.

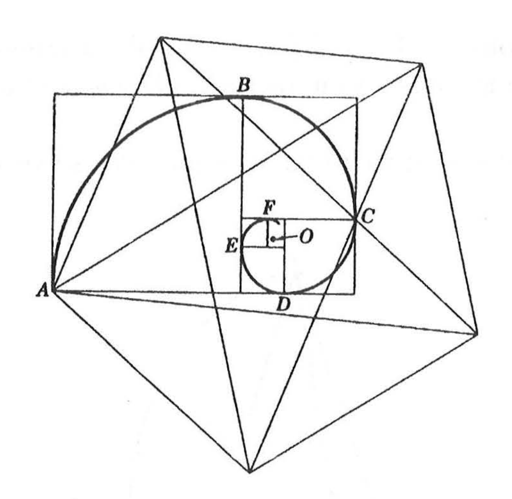
Tomemos OB como unidad en eje polar. Sea r la distancia desde O y θ el ángulo positivo. Como r aumenta según un factor de ϕ para cada vuelta de 108° y decrece según el mismo factor para cada $-108°$, la ecuación en coordenadas polares de la espiral que pasa por A, B, C, D ... es:

$$r = \phi^{\frac{5}{3\pi}\theta}$$

En la figura anterior, esto ocurre para cada 90°, por tanto la ecuación de la espiral en el rectángulo es:

$$r = \phi^{\frac{2}{\pi}\theta}$$

En el caso del pentágono, hay varias espirales para elegir:



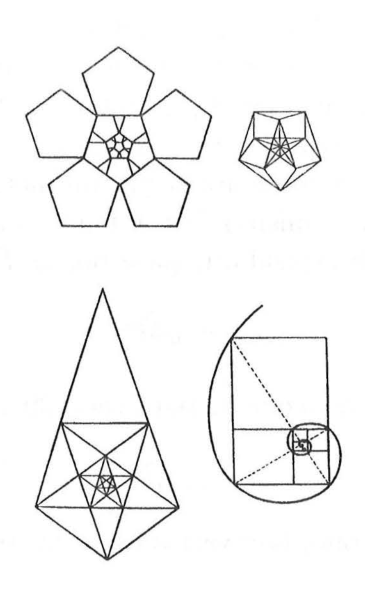
la ecuación se expresa:

$$r = \phi^{\frac{2}{\pi}\theta}$$

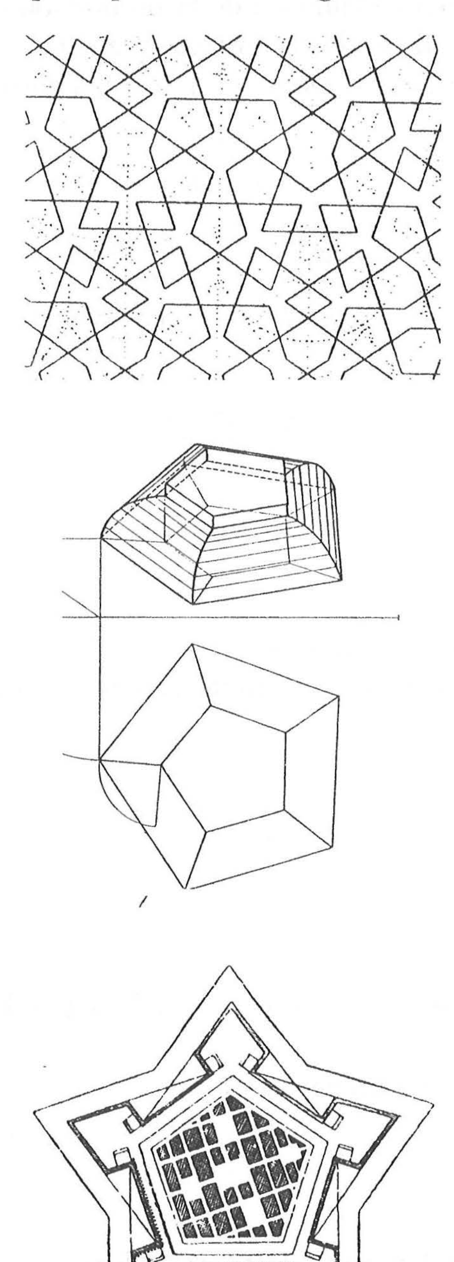
El punto C es un vértice opuesto a A en el pentágono interior.

El punto límite O de rectángulos y pentágonos es el centro de la circunferencia que circunscribe a cualquier pentágono.

Esta espiral exponencial se encuentra en la naturaleza en la concha del Nautilus y en otras conchas marinas.



Añadiendo imaginación y creatividad podemos obtener figuras derivadas del pentágono regular que expresen diseños gráficos interesantes:



2.4 Fracciones continuas con ϕ.

Consideremos la siguiente definición de la proporción aúrea de un segmento.

Sea el segmento a, dividido en dos partes x e y

x es *sección aúrea* de a, o media proporcional entre a e y, si

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$$

o equivalentemente:

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x-y}{y}$$

Como

$$\frac{y}{x} = \frac{x-y}{y}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$$

es decir, y es sección aúrea de x.

Este proceso puede repetirse ilimitadamente, así surgen las fracciones continuas para ϕ.

Como

$$\phi = \frac{1}{\phi - 1}$$

resulta que

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Rightarrow \phi^2 = \phi + 1 \Rightarrow \phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

Sustituyendo de nuevo ϕ,obtenemos:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}$$

Repitiendo indefinidamente este proceso llegamos a la expresión:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots\cdots\cdots}}}}$$

llamada *fracción continua de* ϕ y se dice que converge a ϕ, significando que podemos escribir una fracción continua finita cuyo valor está tan cerca de ϕ como queramos.

Podemos intuir esta convergencia al observar que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= 1 = 1.0 \\ 1+\frac{1}{1} &= \frac{2}{1} = 2.0 \\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}} &= \frac{3}{2} = 1.5 \\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} &= \frac{5}{3} = 1.67 \end{aligned}$$

Cada término se puede expresar en función del anterior:

$$c_n = 1 + \frac{1}{c_{n-1}}$$

$1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}=1.67; \quad 1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}=1.6; \quad 1+\frac{5}{8}=\frac{13}{8}=1.625; \quad 1+\frac{8}{13}=\frac{21}{13}=1.615$

Esta sucesión aproxima a ϕ alternando valores menores y mayores que ϕ. Cada término de las sucesiones de numeradores y denominadores se obtiene sumando los dos anteriores a él:

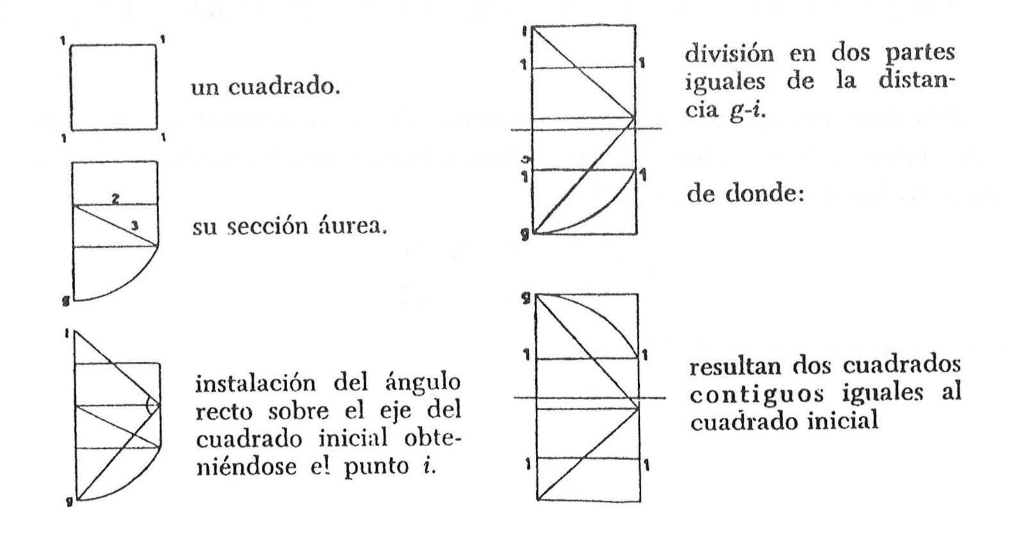
$$1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots$$

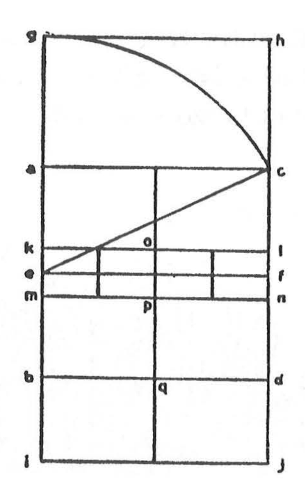
Ambas son sucesiones de Fibonacci.

3 El Modulor.

Le Corbusier (1887-1965) establece un módulo de arquitectura que contempla, al mismo tiempo, las dimensiones humanas y la necesidad de producción en serie. La fórmula ideada por él es "EL MODULOR, ensayo sobre una medida armónica a la escala humana aplicable universalmente a la arquitectura y a la mecánica", fórmula que responde al intento de equilibrar la obra creada con el ambiente que la rodea. Las palabras, instrucciones, que dirige a su discípulo Hanning en 1943 desvelan su propósito:

> "Tome el hombre con el brazo levantado de 2,20 mts de alto, inscríbalo en dos cuadrados superpuestos de 1,10 mts, móntelo a caballo sobre los dos cuadrados y el tercer cuadrado que resulte le dará una solución. El lugar del ángulo recto debe poderle ayudar a colocar el tercer cuadrado. Con este enrejado, regido por el hombre instalado en su interior, estoy seguro de que usted llegará a una serie de medidas que pondrán de acuerdo la estatura humana y la matemática".





Un detenido análisis nos muestra que estas medidas están en proporción aúrea lo que da lugar a una malla fundamental construida a partir de rectángulos aúreos.

"El enrejado da tres medidas: $113, 70, 43$ (en centímetros) que están en razón aúrea

$$\frac{113}{70} = \frac{70}{43}$$

y forman parte de una serie de Fibonacci:

$$\begin{aligned} 43 + 70 &= 113; \\ 113 + 70 &= 183; \\ 113 + 70 + 43 &= 226 \end{aligned}$$

Las tres medidas 113, 183, 226 caracterizan la ocupación del espacio por un hombre de 183 cm. de altura".

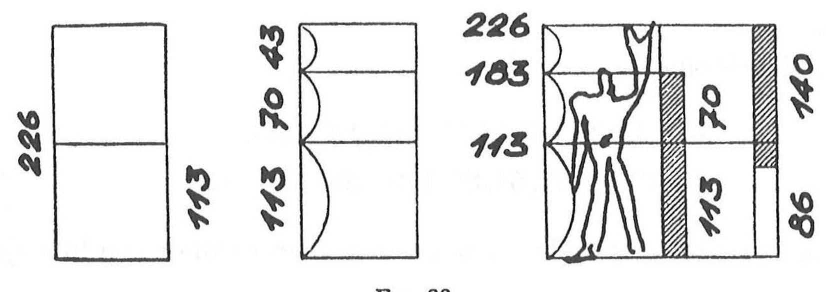
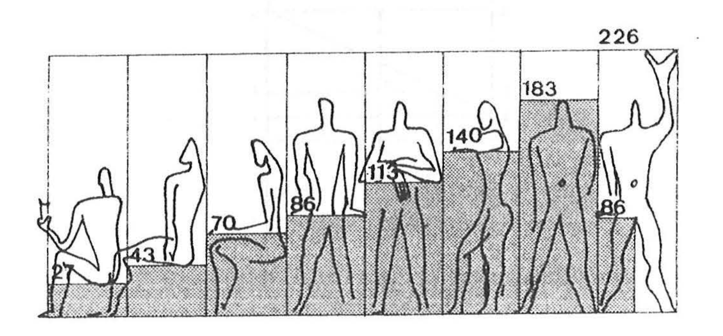


Fig. 23

El hombre en pie confirma estos tres valores esenciales del Modulor, efectivamente 113 marca el plexo solar, 183, el vértice de la cabeza y 226 la extremidad de los dedos con el brazo levantado.



La medida 113 da la sección aúrea $70 - 43$ e inicia la *serie roja* de medidas ideales:

$$4, 6, 10, 16, 27, 43, 70, 113, 183, 296...$$

y la medida 226, doble de 113, da la sección aúrea $140 - 86$ e inicia la otra serie, la *serie azul*:

$$3, 33, 53, 86, 140, 226, 366, 592...$$

Estas dos series se obtienen al tomar la unidad $d = 183$, en la expresión general dada en función de ϕ

$$d, \phi d, \phi^2 d, \phi^3 d, ...$$

para la *serie roja*, y

$$2d, 2\phi d, 2\phi^2 d, 2\phi^3 d, ...$$

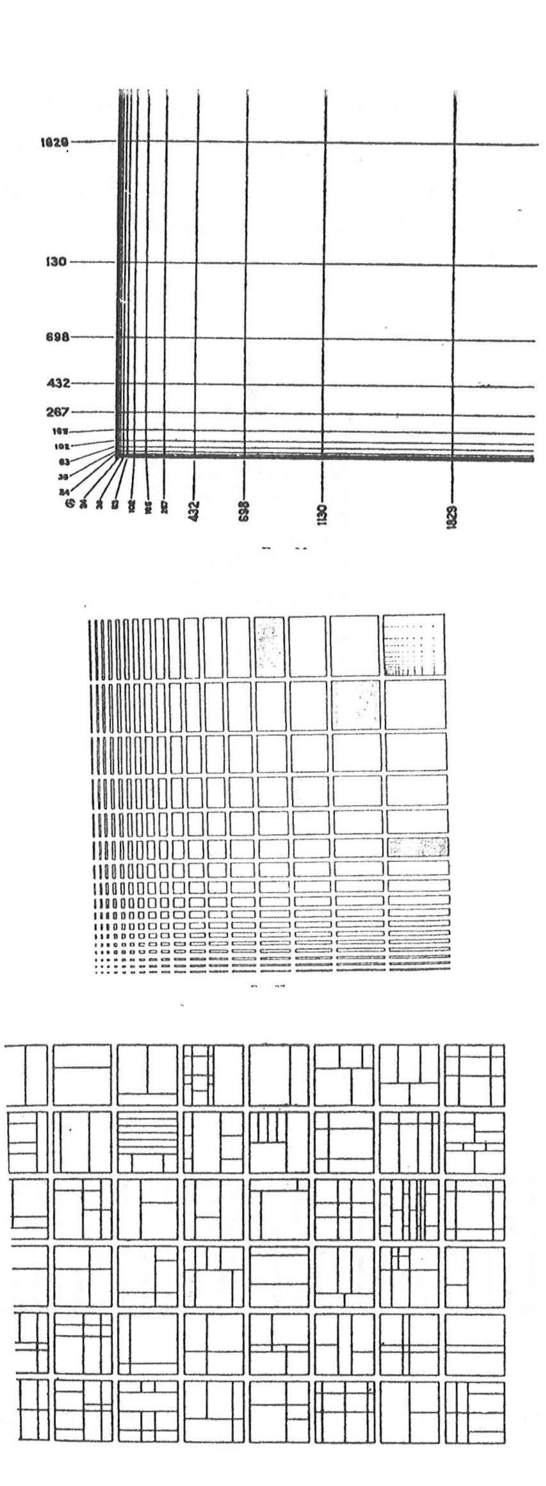
para la *serie azul*.

Las series de Fibonacci:

$$6, 5, 11, 16, 27, 43, 70, 113, 183, 296...$$
$$12, 10, 22, 32, 54, 86, 140, 226, 366, 592...$$

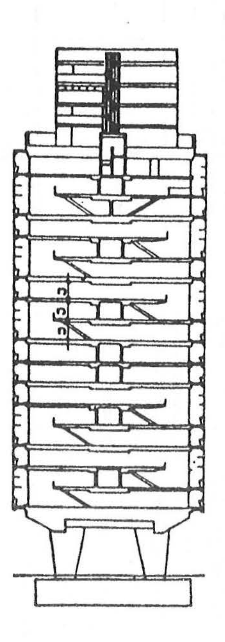
son buenas aproximaciones de las anteriores series definidas en función de ϕ.

La recurrencia de estos valores permiten infinitas combinaciones

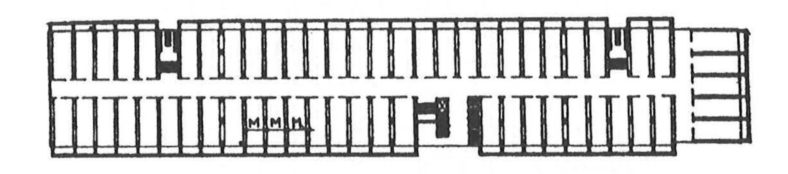


Las medidas del enrejado son aplicadas por Le Corbusier tanto a la planificación urbanística como a los planos de una unidad de alojamiento: planta,

alzado, estancias, carpintería, utensilios, amueblamiento... es interesante conocer su obra "La unidad de vivienda" de Marsella en el Bulevar Michelet, inmueble proyectado para 1.600 personas con 26 servicios comunes, de dimensiones 140 m. de largo x 24 m. de ancho x 56 m. de alto.



Alzado general del inmueble.



Esquema de una planta con 58 apartamentos.

Hasta entonces no se habían aplicado con tal rigor matemático y armonioso estas proporciones a la vida cotidiana.

4 Bibliografía

- Alsina, C. y Trillas, E. *Lecciones de Algebra y Geometría,* Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona, 1984.

(Los dibujos de la parte 1.2 La proporción del rectángulo pertenecen a esta obra).

- Blanco, F. y Nieto, E.,*Morphological interpretations of the golden rectangle,* ISAMA 99, Ed. Javier Barrallo y Nathaniel Friedman.
- Ching, F., *Arquitectura: forma, espacio y orden,* Editorial Gustavo Gili, Mexico,1982.
- Ghyka, M., *El número de oro*, Editorial Poseidón, Barcelona, 1992.
- Ghyka, M., *The geometry of art and life*, Dover Publications, New York, 1977.
- Le Corbusier, *El Modulor y Modulor 2*, Editorial Poseidón, Barcelona, 1980.
- Montiú, A., *El Pentágono*, Editorial Gustavo Gili, 1999.
- Ogilvy, C.Stanley, *Excursions in Geometry,* Dover Publications, 1990.
- *Mathematics and Design 98,* Proceedings of the Second International Conference. Ed. Javier Barrallo, Universidad del País Vasco, 1997.

Índice General

NOTAS

NOTAS

CUADERNO

82.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

http://www.aq.upm.es/of/jherrera

jherrera@aq.upm.es

